

# ANWENDUNGSORIENTIERTES KONZEPT ZUR BERÜCKSICHTIGUNG DER CONSTRAINT-EFFEKTE IN DER TECHNISCHEM BRUCHMECHANIK

H.J. Schindler

Mat-Tec AG, Unterer Graben 27, CH-8401 Winterthur, Schweiz

## An Engineering Framework to Account for Crack-Tip Constraints

**Abstract:** Stress concentration and inhomogeneous plastic deformation in the vicinity of a crack tip cause locally a triaxial stress state. At present time, several parameters are known to characterise these so-called crack-tip constraints. However, the determination of these parameters requires rather detailed FEM-models, which makes them unsuitable for practical engineering purposes. In this paper an attempt is made to establish a simpler concept to deal with the question of constraints. The concept includes suggestion of a new parameter,  $\gamma_{mT}$ , to quantify the constraints, and a rough theoretical framework that allows fracture toughness to be corrected for the effect of constraints by closed-form equations. The concept is well suited to be applied in an engineering failure analysis.

## 1 Einleitung

Die Spannungskonzentration an einer Risspitze erzeugt infolge der lokalen Dehnungsbehinderungen einen mehrachsigen Spannungszustand. Diese Dehnungsbehinderungen werden in der englischen Literatur als „Crack-Tip-Constraints“ bezeichnet, und auch in der deutschen Literatur hat sich der Begriff "Constraints" zur Bezeichnung des Grades der lokalen Mehrachsigkeit eingebürgert. Die Constraints bewirken bei elastisch-plastischen Werkstoffen, dass die Spannungen in der Nähe der Risspitze deutlich über der Streckgrenze liegen (Fig. 1). Damit beeinflussen sie das lokale Fliess- und Bruchverhalten entscheidend. Die wichtigsten Effekte sind die folgenden:

1. Je höher die Constraints, desto eher sind die Bedingungen für Spaltbruch erfüllt, d.h. höhere Constraints bewirken eine Abnahme der zu einem Spaltbruch notwendigen J-Integrals. Dies äussert sich z.B. bei ferritischen Stählen in einer Verschiebung der Zäh-Spröd-Übergangstemperatur-Temperatur.
2. Die plastische Verformbarkeit wird verringert, was eine Verringerung der charakteristischen lokalen Deformationsparameter (namentlich Risspitzenöffnung  $\delta_i$ , Rissöffnungswinkel CTOA, und damit zusammenhängend,  $J_i$ ,  $J_{0.2BI}$ ) bewirkt.

Oft ist es zweckmässig, zwischen den sogenannten „Out-of-plane-Constraints“ (OPC), d.h. Deformationsbehinderung quer zur Scheiben- oder Plattenebene (mit dem ebenen Dehnungszustand als Extremfall), und den In-Plane-Constraints (IPC), d.h. Dehnungsbehinderung in der Scheibenebene, zu unterscheiden. Die IPC werden im Allgemeinen nur wirksam, wenn auch ein Mindestmass an OPC vorliegt. Insofern sind die OPC als die dominierenden Constraints zu betrachten.

In den Rissausbreitungskriterien der Bruchmechanik wirken sich die Constraints in erster Linie materialseitig aus, d.h. sie beeinflussen den durch die Bruchzähigkeit charakterisierten Risswiderstand. Damit schränken sie die Übertragbarkeit dieser "Materialkennwerte" von der Probe auf ein Bauteil insofern ein, als diese nur dann gewährleistet ist, wenn hinsichtlich der Constraints im Bauteil vergleichbare oder günstigere Bedingungen herrschen als in der Probe. Deshalb enthalten die Prüfnormen für die Bruchzähigkeit [1] immer auch Anforderungen an die Constraints,

zumindest implizit durch Vorgaben der minimalen Probendicke, der Probenform und der relativen Risstiefe. Damit soll erreicht werden, dass eine Übertragung der Kennwerte von der Probe auf ein beliebiges Bauteil im Allgemeinen mehr oder weniger konservativ ist.

In praktischen Problemstellungen gibt es aber auch immer wieder Fälle, wo diese implizite Art des Umgangs mit den Constraints nicht genügt, sei es zur Vermeidung unnötiger Konservativität, oder um die Verwendung von Daten aus nicht-normgerechten (z.B. untermassigen) Proben in bruchmechanischen Berechnungen zu ermöglichen. Bei solchen Fragestellungen muss der Einfluss der Constraints auf die Bruchzähigkeit und das Bruchverhalten explizit berücksichtigt werden können. Dazu bedarf es eines Parameters, der die Constraints mit vertretbarem Aufwand aber doch zuverlässig zu quantifizieren vermag, und hinreichend einfache theoretische Zusammenhänge zur Berechnung ihres Einflusses auf das Bruchverhalten.

Was die Frage geeigneter Parameter betrifft, herrscht in der Fachwelt noch kein allgemeiner Konsens. Die beiden bestbekanntesten Parameter sind die sogenannte T-Spannung des elastischen Felds [2] (entsprechend dem Term  $a_2$  gemäss [3]) und ihr Analogon im elastisch-plastischen Spannungsfeld, Q, [4]. Beide weisen jedoch nicht zu übersehende Schwachpunkte auf: T als Teil des elastischen Spannungsfelds ist in der elastisch-plastischen Bruchmechanik lediglich ein charakterisierender Parameter, d.h. er ist nur in empirischen Korrelationen, nicht aber in theoretisch begründeten Umrechnungsformeln, zu gebrauchen [5]. T ist namentlich auch nicht in der Lage, die Constraints gesamthaft – d.h. IPC und OPC in Kombination - zu beschreiben. Q ist hinsichtlich dieser Aspekte zwar leistungsfähiger, erfordert aber zu seiner Bestimmung eine nichtlineare 3D-Spannungsanalyse. Eine solche ist aber oft zu aufwendig und passt nicht in das Konzept der technischen Bruchmechanik - das sich ja gerade dadurch auszeichnet, dass das Verhalten von Rissen ohne detaillierte lokale Berechnung prognostiziert werden kann.

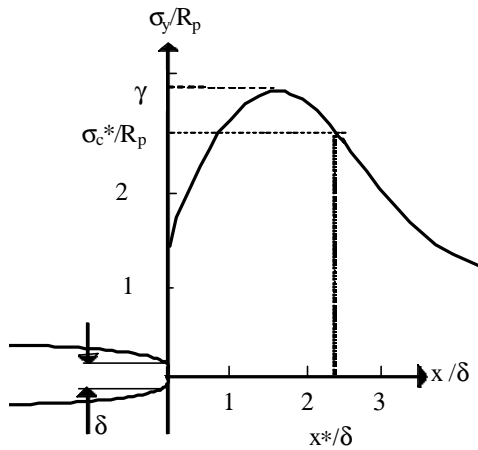
Die adäquate Berücksichtigung der Constraints im ingenieurmässigen Sinn ist also immer noch ein weitgehend ungelöstes Problem. Im vorliegenden Bericht wird ein mögliches Konzept vorgeschlagen. Dieses beinhaltet einerseits einen charakterisierenden Parameter, der etwas einfacher zu bestimmen ist als Q, und andererseits geschlossenen analytische und damit anwendungsfreundliche Beziehungen zwischen den Constraints und den wichtigsten bruchmechanischen Kennwerten (vgl. auch [6]).

## 2 Einfluss der Constraints auf die Bruchzähigkeit

Die Constraints bewirken eine Erhöhung der Spannungen in der plastischen Zone über die Fließgrenze hinaus (Fig. 1). Eine an sich naheliegende Möglichkeit zur Beschreibung der Constraints ist deshalb der Faktor

$$\gamma = \sigma_{y\max} / R_p, \quad (1)$$

Die entsprechende Spannungsspitze liegt, wie man aus zahlreichen numerischen Untersuchungen weiss, bei rund  $x=2\delta$ , wobei  $\delta$  die Rissöffnung bezeichnet. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich mit einfachen Modellen und Hypothesen geschlossene Zusammenhänge zwischen  $\gamma$  und der effektiven (d.h. für den betrachteten Fall gültigen) Bruchzähigkeit herleiten lassen.



*Fig. 1: Dimensionslose Darstellung der lokalen Spannungen in der Nähe einer Rissspitze in elastisch-plastischem Material (schematisch)*

## 2.1. Duktiles Reißen

Duktiles Reißen setzt ein, wenn im Bereich der Rissspitze die plastische Bruchdehnung  $\epsilon_{pf}$  erreicht wird, wobei letztere vom Mehrachsigen Grad so abhängt, dass sie mit zunehmender hydrostatischer Spannung abnimmt [7]. Deshalb beginnt der Reissprozess dort, wo die grösste Mehrachsigkeit vorliegt, nach Fig. 1 also bei etwa  $x=2\delta$ . Eine einfache Versagenshypothese, die dieses experimentell vielfach nachgewiesene Verhalten beschreibt, ist die Hypothese von Gillemot [8]. Diese besagt, dass der lokale duktile Bruch dann erfolgt, wenn die plastische Deformationsenergiedichte  $U_p$  den materialabhängigen kritischen Wert  $U_{pf}$  („spezifische Brucharbeit“) erreicht.  $U_{pf}$  lässt sich am einfachsten am einachsigen Zugversuch bestimmen, wo sie die Fläche unter dem wahren Spannungs-Dehnungs-Diagramm darstellt. Näherungsweise lässt sie sich gemäss [9] mit folgender einfacher Formel aus Kennwerten des Zugversuchs bestimmen:

$$U_{pf} \approx \frac{\mathbf{s}_f \cdot \mathbf{Z}}{1 - Z} \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet  $Z=(A_0-A_f)/A_0$  die Einschnürung im einachsigen Zugversuch ( $A_0$ : Ausgangsquerschnitt der Zugprobe,  $A_f$ : Bruchquerschnitt in der Einschnürung) und  $\sigma_f = (R_m+R_p)/2$  die in der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM) gebräuchliche Fließspannung. Im Bereich der Rissspitze treten im Allgemeinen so hohe Dehnungen auf, dass eine Linearisierung nicht mehr gerechtfertigt ist. Deshalb ist es angezeigt, die Berechnung von  $U_p$  auf der Basis der logarithmischen Dehnung durchzuführen. Unter der Annahme, dass die plastische Dehnung vorwiegend in  $y$ -Richtung auftritt, ergibt sich damit aus der erwähnten Gillemot'schen Bruchhypothese folgende approximative Beziehung zwischen  $\gamma$  und der plastischen Bruchdehnung:

$$\mathbf{g} \cdot R_p \cdot \ln(1 + \mathbf{e}_{pf}) = U_{pf} \quad (3)$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$\mathbf{e}_{pf} = \exp\left[\frac{\mathbf{s}_f \cdot \mathbf{Z}}{R_p \cdot \mathbf{g} \cdot (1 - Z)}\right] - 1 \quad (4)$$

Aus Ähnlichkeitsgründen und aufgrund der Hypothese der Autonomie der Prozesszone darf angenommen werden, dass die Rissöffnung beim Beginn des duktilen Reissens,  $\delta_i$ , zu  $\epsilon_{pf}$  proportional ist. Mit dem allgemeinen Zusammenhang zwischen Rissöffnung und J-Integral,

$$J = m \cdot R_p \cdot \delta \quad (5)$$

erhält man daraus eine Beziehung zwischen  $\gamma$  und dem für die Rissinitiierung erforderlichen J-Integral  $J_i$ :

$$\frac{J_i}{m \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{\mathbf{s}_f \cdot Z}{R_p \cdot \mathbf{g} \cdot (1-Z)} \right] - 1 \right\}} = const \quad (6)$$

Für  $J_i$  kann wahlweise einer der gebräuchlichen technischen Initiierungswerte  $J_{0.2}$ ,  $J_{0.2BI}$  oder  $J_{Ic}$  eingesetzt werden.

## 2.2. Initiierung eines Spaltbruchs

In Anlehnung an eine bekannte Spaltbruchhypothese [10] wird im folgenden angenommen, dass zur Auslösung eines Spaltbruchs einerseits die Spaltzugspannung  $\gamma \cdot R_p > \sigma_c^*$  überschritten werden muss und andererseits im Gebiet  $0 < x < x^*$  (vgl. Fig. 1) soviel elastische Energie  $W_{el} = \int U_{el} \cdot dV$  gespeichert sein muss, dass ein spontaner Spaltbruch im Bereich  $0 < x < x^*$  möglich ist. Das zweite Kriterium bedeutet, dass  $W_{el}/x^*$  einen kritischen Wert überschreiten muss. Die elastische Energiedichte  $U_{el}$  ist zu  $(\gamma \cdot R_p)^2$  proportional. Des Weiteren ist  $x^*$  zur Rissöffnung  $\delta$  und das entsprechende Volumen zu  $\delta^2$  proportional. Diese Proportionalitäten sowie (5) führen zur folgenden allgemeinen Beziehung zwischen dem zur Initiierung eines Spaltbruchs notwendigen J-Integral,  $J_c$ , und den Constraints:

$$J_c \cdot R_p \cdot \frac{\mathbf{g}^2}{m} = const \quad \text{für } \gamma > \sigma_c^*/R_p \quad (7a)$$

$$J_c = \infty \quad (\text{kein Spaltbruch}) \quad \text{für } \gamma < \sigma_c^*/R_p \quad (7b)$$

Anstelle von  $J_c$  kann wahlweise auch einer der in [1] definierten Kennwerte  $J_u$  oder  $J_{uc}$  eingesetzt werden. Bei bekannter Temperaturabhängigkeit der Streckgrenze, gegeben durch die Werkstofffunktion  $R_p = f(T)$ , lässt sich aus (7a) ohne weiteres auch die Abhängigkeit von  $J_c$  von der Temperatur und den Constraints als mathematische Funktion  $J_c(T, \gamma)$  angeben. Aus der Bedingung  $\gamma = \sigma_c^*/R_p(T)$  gemäss (7b) folgt analog ein Zusammenhang zwischen der Zäh-Spröd Übergangstemperatur  $T_{DBT}$  als Funktion der Constraints  $\gamma$ .

Mit (6) und (7) lässt sich somit der Einfluss der Constraints (repräsentiert durch  $\gamma$  und  $m$ ) auf die effektive Bruchzähigkeit berechnen. Der Parameter  $m$  ist für verschiedene Rissysteme bekannt oder lässt sich mit relativ wenig Aufwand berechnen oder messen [11]. Eine Möglichkeit zur Abschätzung von  $\gamma$  wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

### 3 Abschätzung der lokalen Spannungsspitze

Die im Folgenden gezeigte Approximation von  $\gamma$  basiert auf der Annahme einer Analogie zwischen klein-plastischem und allgemeinem Fließen hinsichtlich der Auswirkung der Parameter  $m$  und  $T$  auf die lokale Spannung. Deshalb betrachten wir zuerst den Spezialfall des kleinplastischen Fließens (SSY).

#### 3.1 Lokale Spannung bei kleinplastischem Fließen

Für SSY und ein ideal-starr-plastisches Material findet man wie in [12] gezeigt mittels eines lokalen Gleitlinienfelds als maximale Spannung vor der Rissspitze

$$\mathbf{s}_{y_{max}} = (2 + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{t}_p \quad (8)$$

und für die Rissöffnung

$$\mathbf{d} = \frac{2(1 - \mathbf{u}^2)}{2 + \mathbf{p}} \cdot \frac{K_I^2}{E \cdot \mathbf{t}_p} = \frac{2}{2 + \mathbf{p}} \cdot \frac{J}{\mathbf{t}_p} \quad (9)$$

Hierbei ist für die Fließschubspannung  $\tau_p$  entweder

$$\tau_p = R_p / 2 \quad (\text{für ein Material nach Tresca'schem Fließgesetz}) \quad (10a)$$

oder

$$\tau_p = R_p / \sqrt{3} \quad (\text{für ein Material nach von-Mises'schem Fließgesetz}) \quad (10b)$$

einzusetzen. Ein Vergleich von (9) mit (5) führt zu

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (0.5 + \pi/4) \quad (\text{Tresca}) \quad \text{bzw.} \quad m = (0.5 + \pi/4) \quad (\text{v. Mises}) \quad (11)$$

und mit (8) zu

$$\sigma_{y_{max}} = 2m \cdot R_p \quad (12)$$

Für SSY ist plastische Zone in eine elastische Umgebung eingebettet. Letztere kann eine  $R_p$  übersteigende Spannung nur aufnehmen, wenn eine genügende Mehrachsigkeit vorliegt. Der Einfachheit halber soll dies mit einem Fließstreifenmodell betrachtet werden, d.h. es wird angenommen, dass das Fließen auf einen schmalen Streifen beidseits der  $x$ -Achse beschränkt ist und vorwiegend in  $y$ -Richtung stattfindet. Für das elastische Spannungsfeld gilt nach [3]

$$\sigma_x(x,0) = \sigma_y(x,0) \quad (13)$$

Des weiteren gilt für EVZ

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - 2\nu \cdot \sigma_y) = 0 \quad (14)$$

wobei an der Grenze zur plastischen Zone für Tresca'sches Fließverhalten

$$\mathbf{s}_y - \mathbf{s}_z = 2\mathbf{t}_p \quad (15)$$

erfüllt sein muss. Damit erhält man

$$\mathbf{s}_{y\max} = \frac{2t_p}{1-2\mathbf{n}} \quad (16)$$

Obschon hier von einem andern Fließmodell ausgegangen wurde als in der Herleitung von (8), kommt (16) dem Wert von (8) für  $\nu=0.3$  und Tresca'sches Fließverhalten (10a) interessanterweise sehr nahe.

Ein zusätzliches Spannungsfeld parallel zur Rissrichtung, wie es von T beschrieben wird, beeinflusst das Fließverhalten sowohl im Fließstreifen als auch im angrenzenden elastischen Gebiet. In letzterem gilt nach [3] in der Nähe der x-Achse

$$\mathbf{s}_x(x,0) = \mathbf{s}_y(x,0) + T \quad \text{für } T < 0 \quad (17)$$

Was die Auswirkung von T auf das plastische Fließen in y-Richtung betrifft, ist zwischen positiven und negativen Werten von T zu unterscheiden. Liegt ein negativer Wert der T-Spannung vor, ist (13) durch (17) zu ersetzen, und man erhält

$$\mathbf{s}_{y\max} = \frac{R_p + \mathbf{n} \cdot T}{1-2\mathbf{n}} \quad (\text{für EVZ und } T < 0) \quad (18)$$

oder analog zu (14):

$$\mathbf{s}_{y\max} @ 2\mathbf{n}R_p + \frac{\mathbf{n}}{1-2\mathbf{n}} \cdot T \quad (\text{für EVZ und } T < 0) \quad (19)$$

Für positive T wird  $\sigma_{y\max}$  nicht entsprechend (19) mit zunehmendem T erhöht, weil das  $\sigma_{y\max}$  aus (8) massgebend wird. Somit gilt für  $T > 0$  näherungsweise Gl. (12), d.h.

$$\mathbf{s}_{y\max} @ 2\mathbf{n}R_p \quad (\text{für EVZ und } T > 0) \quad (20)$$

gilt. Für ESZ haben die IPC generell praktisch keinen Einfluss auf  $\sigma_{y\max}$ , da das lokale Fließen vorwiegend durch Scherung in Querrichtung stattfindet. Dadurch bildet sich wie beim einachsigen Zugversuch eine lokale Einschnürung. Deshalb erreicht die lokale Spannung wie beim einachsigen Zugversuch maximal die Zugfestigkeit  $R_m$ , d.h.

$$\mathbf{s}_{y\max} @ R_m \quad (\text{für ESZ}) \quad (21)$$

### 3.2. Vorschlag eines neuen Parameters zur Charakterisierung der Constraints

Die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Zusammenhänge (19) und (20) gelten wie erwähnt für SSY. Wie aus (19-21) ersichtlich, hängt die maximale Spannung in der plastischen Zone im Wesentlichen von den Parametern  $\mathbf{n}$  und T ab. Der Faktor  $\mathbf{n}$  ist in der Beziehung (5) definiert, die unabhängig von der Grösse der plastischen Zone gilt, und stellt damit schon für sich ein gewisses Mass für die Constraints dar [11]. Vom Parameter T ist aus verschiedenen Publikationen bekannt, dass sein Einfluss auf das Bruchverhalten auch im vollplastischen Zustand empirisch nachweisbar ist [2]. Zumindest qualitativ wirken sich also diese beiden Parameter selbst im vollplastischen Zustand ähnlich auf die lokale Spannungsspitze aus wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigten Fall des SSY. Aus diesen Gründen ist die Annahme naheliegend, dass sich

die Beziehungen (19-21) in analoger Weise über den Zustand des SSY hinaus verallgemeinern lassen, dass (19-21) ihre Gültigkeit zur Berechnung der lokalen Spannung selbst im Zustand des vollplastischen Fließens näherungsweise beibehalten. Zur Unterscheidung vom "exakten" Wert  $\gamma$  wird nun ein approximativer Parameter  $\gamma_{mT}$  wie folgt definiert:

$$\gamma_{mT} := c_m \cdot m + c_b \cdot \beta \quad (22)$$

wobei

$$\beta = T_{\max} / R_p \quad (23)$$

mit

$$T_{\max} = T(K_I = K_{Ic}) \quad \text{für SSY} \quad (23a)$$

$$T_{\max} = T(F = F_p) \quad \text{ausserhalb SSY} \quad (23b)$$

wobei  $F$  die äussere Last und  $F_p$  ihr plastischer Grenzwert bezeichnet.  $\beta$  beschreibt somit die beim betrachteten System maximal auftretende T-Spannung  $T_{\max}$  in dimensionsloser Form. Für die Faktoren  $c_m$  und  $c_b$  ist aufgrund der angenommenen Analogie zum Fall SSY nach (19-21) etwa mit folgenden Werten zu rechnen:

$$\text{für EVZ, } T < 0: \quad c_m = 2 \quad c_b = 1 \quad (24a)$$

$$\text{für EVZ, } T > 0 \quad c_m = 2 \quad c_b = 0 \quad (24b)$$

$$\text{für ESZ} \quad c_m = S_f / R_p \quad c_b = 0 \quad (24c)$$

Da es sich ohnehin um Näherungen handelt und die Constraint-Einflüsse im allgemeinen relativ zu einem Referenzzustand zu beurteilen sind (siehe unten, Gl. (26) und (27)), wurden für  $c_m$  und  $c_b$  möglichst runde Zahlen eingesetzt. Es ist natürlich nicht auszuschliessen, dass zukünftige numerische und experimentelle Studien gewisse Korrekturen an diesen Werten als angezeigt erscheinen lassen.  $\gamma_{mT}$  wurde wie oben erläutert als Näherung für  $\gamma$  für ein elastisch-idealplastisches Material eingeführt. Bei realen Werkstoffen wird  $\gamma$  zusätzlich durch die Kaltverfestigungseigenschaften beeinflusst. Tendenziell kann dieser Einfluss durch die Beziehung

$$\mathbf{g} \cong \frac{\mathbf{g}_{mT} \cdot \mathbf{S}_f}{R_p} \quad (25)$$

berücksichtigt werden. Eingesetzt in (6) und (7) lauten die Beziehung zwischen der Bruchzähigkeit und dem Parameter  $\gamma_{mT}$  somit

$$\frac{J_i}{m \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{Z}{\mathbf{g}_{mT} \cdot (1-Z)} \right] - 1 \right\}} = const \quad (26)$$

$$J_c \cdot \mathbf{S}_f^2 \cdot \frac{\mathbf{g}_{mT}^2}{R_p \cdot m} = const \quad \text{für } \gamma_{mT} > \sigma_c^* / \sigma_f \quad (27a)$$

$$J_c = \infty \quad (\text{kein Spaltbruch}) \quad \text{für } \gamma_{mT} < \sigma_c^* / \sigma_f \quad (27b)$$

Die rechte Seite der Ungleichungen in (27a, b) ist hierbei als experimentell zu bestimmender Materialkennwert zu betrachten. Im Vergleich zu  $\gamma$  oder  $Q$ , die beide zu ihrer Bestimmung eine

detaillierte nichtlineare FEM-Berechnung erfordern, ist  $\gamma_{mT}$  deutlich leichter zu erhalten: T lässt sich an einem relativ groben elastischen FEM-Modell mit genügender Genauigkeit berechnen, und m kann mittels (5) aus einer Verschiebungsgrösse ( $\delta$ ) ermittelt werden, was ebenfalls geringere Detailierungsanforderungen an eine FEM-Berechnung stellt. Das Materialverhalten soll dabei generell als elastisch-ideal-plastisch eingesetzt werden. Im Gegensatz zu  $\gamma$  oder Q ist in bestimmten einfachen Fällen sogar eine experimentelle Bestimmung von m möglich. Zudem sind die Parameter T und m für viele Rissysteme schon einigermaßen bekannt.

#### 4. Erste Anwendungen und Vergleiche

Mit den Proportionalitätsgesetzen (26) und (27) lassen sich die bruchmechanischen Kennwerte für unterschiedliche  $\gamma_{mT}$  korrigieren. Beispielsweise lässt sich mit (26) ein  $J_{0.2/ESZ}$ -Wert, der an einer Probe unter ESZ bestimmt wurde, in einen für EVZ gültigen  $J_{0.2/EVZ}$  umrechnen, indem die entsprechenden Werte für  $\gamma$  und m, die für EVZ  $\gamma \approx 3.0$  und  $m=1.48$ , für ESZ  $\gamma=1.2$ ,  $m=1$  lauten, eingesetzt werden. Damit ergibt sich beispielsweise für einen Werkstoff mit  $Z=0.6$   $J_{0.2/EVZ} = J_{0.2/ESZ} / 2.55$  was grössenordnungsmässig mit Werten aus der Literatur übereinstimmt [13].

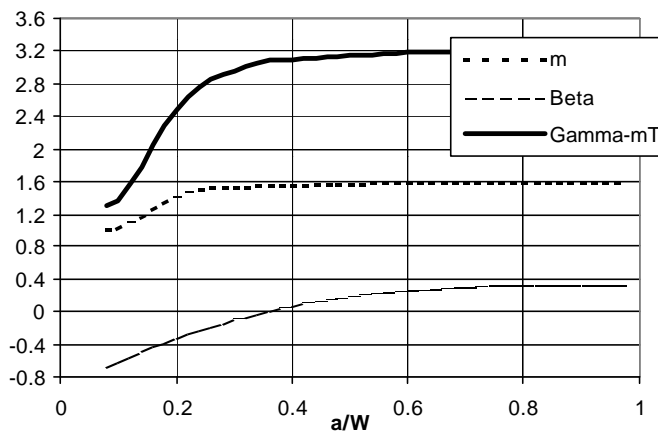


Fig. 2: Approximativer Verlauf der Constraint-Parameter m,  $\beta$  und  $\gamma_{mT}$  als Funktion der Risstiefe im Fall eines Balkens mit Randriss unter Biegung.

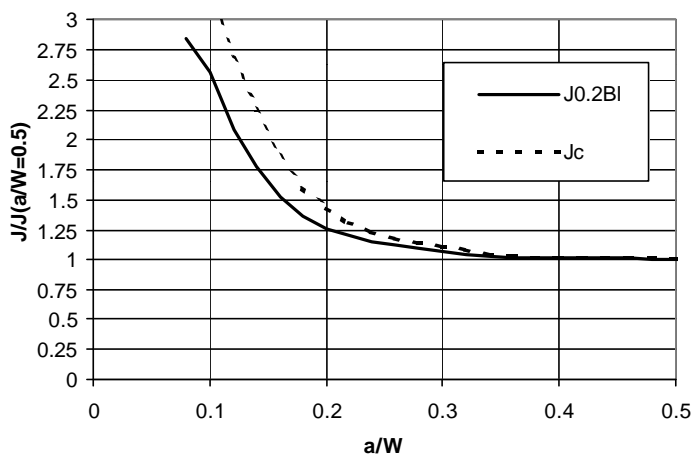
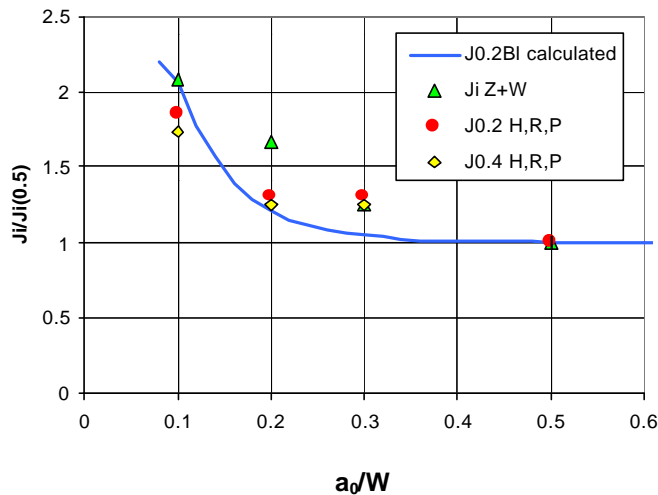


Fig. 3: Einfluss der Risslänge auf die bruchmechanischen Parameter bei einem Balken mit Randriss unter Biegung (für  $Z=0.6$ )

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Einfluss der Risstiefe auf den Risswiderstand im Fall eines Randrisses in einem Balken unter Drei-Punkt-Biegung. Der Parameter  $\beta(a/W)$  kann aus [14] entnommen werden, und eine approximative Berechnung von  $m(a/W)$  ist in [15] gezeigt. Figur 2 zeigt den Verlauf dieser beiden Parameter und den daraus nach (22)-(24) resultierenden

Parameter  $\gamma_{mT}$ . Der damit aus (26) bzw. (27) berechnete Einfluss der Risslänge auf  $J_c$  und  $J_{0.2BI}$  ist in Fig. 3 als Quotient mit dem betreffenden Wert bei der Standard-Risslänge  $a=0.5W$  gezeigt. In Fig. 4 sind diese theoretischen Ergebnisse mit experimentellen Daten verglichen. Die Übereinstimmung darf als befriedigend bezeichnet werden. Auch Vergleiche von  $J_c$ -Werten aus der Literatur (z.B. [16]) mit (27) zeigen generell eine gute Übereinstimmung, wobei die experimentellen Werte naturgemäss relativ stark streuen.



*Fig. 4: Vergleich der nach (27) berechneten Initiierungswerte in Abhängigkeit der Risstiefe bei 3PB mit experimentellen Daten von Hancock et al. (H,R,P, [2]) und Zhang und Wang(Z+W, [17])*

## 5 Diskussion und Schlussfolgerungen

Aufgrund einfacher Modelle wurden geschlossene Beziehungen zwischen Bruchzähigkeitskennwerten und der durch  $\gamma$  quantifizierten lokalen Spannungsspitze gefunden. Zur approximativen Berechnung der benötigten lokalen Spannungsspitze wurde der neue Constraint-Faktor  $\gamma_{mT}$  eingeführt. Im Vergleich zu  $\gamma$  oder  $Q$  hat  $\gamma_{mT}$  den Vorteil, dass er lediglich von den zwei gut bekannten und definierten Parametern  $m$  und  $T$  abhängt. Zur numerischen Berechnung von  $T$  genügt ein lineares FEM-Modell, und zu jener von  $m$  ein relativ grobes elastisch-plastisches FEM-Modell mit elastisch-ideal-plastischem Materialgesetz. Für einfache Fälle, beispielsweise für einen Randsriss in einem Balken unter Biegung, sind sogar analytische Abschätzungen möglich.

Dass mit jeder Vereinfachung auch eine Reduktion der Genauigkeit einhergeht, ist selbstverständlich. Die Berücksichtigung der Constraints in einer ingenieurmässigen bruchmechanischen Analyse ist deshalb immer eine Frage des Abwägens zwischen den erforderlichen Genauigkeitsanforderungen und dem zu leistenden rechnerischen Aufwand.

Obschon eine ausreichende experimentelle Validierung zurzeit noch fehlt, weisen die gezeigten Plausibilitätsbetrachtungen und die angestellten Vergleiche mit experimentellen Daten darauf hin, dass der Faktor  $\gamma_{mT}$  zur Charakterisierung der Constraints im allgemeinen für praktische Anwendungen genügend genau ist. Zur näherungsweise Berücksichtigung des Einflusses der Risstiefe und der Bauteilgeometrie auf die Bruchzähigkeitskennwerte  $J_{0.2BI}$  und  $J_c$  dürfte er in praktischen bruchmechanischen Analysen oft zweckmässig sein.

## Literaturverzeichnis

- [1] ISO-Standard ISO 12135, Metallic Materials – Unified method of test for the determination of quasistatic fracture toughness.
- [2] J.W. Hancock, W.G. Reuter, D.M. Parks, "Constraint and toughness parameterized by T", Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, 1993, 21-40
- [3] M.L. Williams, J. Appl. Mechanics, 24, 1957, 109-114
- [4] C.F. Shih, N.P. O'Dowd, M.T. Kirk, "A framework for quantifying crack tip constraint", Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993, 2-20
- [5] M.T. Kirk, K.C. Koppenhoefer, C.F. Shih, "Effect of constraint on specimen dimensions needed to obtain structurally relevant toughness measures", ASTM STP 1171, 1993, 79-103
- [6] H.J. Schindler, An Engineering Framework to Account for Crack-Tip-Constraints in Fracture Mechanics, Proc. of 8<sup>th</sup> Int. Conf. on the Mechanical Behaviour of Materials, Victoria, CA, 1999, pp. 25 – 30
- [7] J.W. Hancock, A.C. Mackenzie, "On the Mechanisms of ductile failure in high strength steels subjected to multiaxial stress states, J. Mechanics and Physics of Solids, 24, 1976, 147-169
- [8] L.F. Gillemot, "Criterion for crack initiation and spreading", Eng. Fracture Mechanics, 1976, 239-253
- [9] H.J. Schindler, Strain Energy Density as the link between global and local approach to fracture, Proc. of 10th Int. Conf. on Fracture (ICF 10), Honolulu, Elsevier Science, 2001, Paper No. ICF 100494 (auf CD)
- [10] R.O. Ritchie, J.F. Knott, J.R. Rice, "On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel", J. Mechanics and Physics of Solids, 21, 395-410
- [11] J.G. Merkle, "Patterns and perspectives in applied fracture mechanics", ASTM STP 1256, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1995, 3-40
- [12] J.R. Rice, "A mathematical theory of fracture", in: Fracture (ed. H. Liebowitz), Vol II, Academic Press, 1968, 191-311
- [13] NASA, NASGRO Computer Program Version 3.0, Reference Manual, Houston, August 2000
- [14] J.A. Joyce, R. Link, "Effects of constraints on upper shelf fracture toughness", in: ASTM STP 1256, 1995, 142-177
- [15] H.J. Schindler, "On the most favourable initial crack length in Fracture toughness testing using sub-sized specimens, ASTM STP 1418, M.A. Sokolov and J.D. Landes, Eds., American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, 2002.
- [16] J.D.G. Sumpter, A.T. Forbes, "Constraint based analysis of shallow cracks in mild steel", Shallow Crack Fracture Mechanics, Paper No. 7, Cambridge, UK, 1992
- [17] D.Z. Zhang, H. Wang, "On the effect of the ratio  $a/W$  on the values of  $\delta_i$  and  $J_i$  in a structural steel", Eng. Fracture Mechanics, 26, 1987, 247-250